Контрольная работа № 4
Неопределенный и определенный интеграл
Вариант № 7

Задача 117. Найти интеграл

а) $\int\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt[4]{x^5}\right)dx=\frac{2}{3}x+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{4}{9}\sqrt[4]{x^9}+C$;

в) $\int x\cdot e^{2x+1}dx=\left|\begin{matrix} U=x & dU=dx \\ dV=e^{2x+1} & V=\frac{1}{2}e^{2x+1}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}xe^{2x+1}-\frac{1}{2}\int e^{2x+1}dx=\frac{1}{2}xe^{2x+1}-\frac{1}{4}e^{2x+1}+C$;

г) $\int\limits_{2/3}^{1}\frac{dx}{(3x-1)^3}=\frac{1}{3}\int\limits_{2/3}^{1}\frac{d(3x-1)}{(3x-1)^3}=\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(3x-1)^2}\right)\Bigg|_{2/3}^{1}=-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(3\cdot1-1)^2}-\left(-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(3\cdot\frac{2}{3}-1\right)^2}\right)=$

$=-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$.

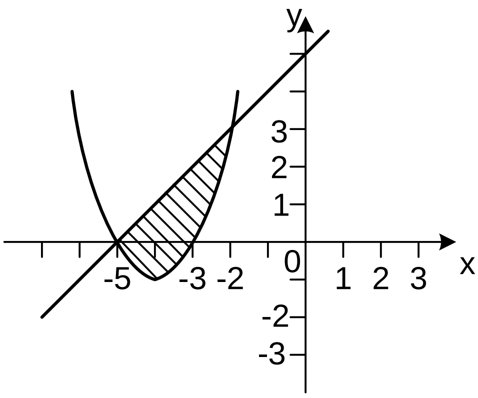
Задача 127. Построить фигуру, ограниченную указаными линиями, и найти ее площадь.

$$y=x^2+8x+15;\ y=x+5.$$

Найдем точки пересечения прямой и параболы, для этого решим уравнение:

$$x+5=x^2+8x+15;$$
$$x^2+7x+10=0;$$
$$x_1=-2;\ x_2=-5;$$
$$(-2;3);\ (-5;0).$$

Построим фигуру ограниченную параболой и прямой.



Найдем площадь фигуры:

$$S=\int\limits_{-5}^{-2}\left(x+5-x^2-8x-15\right)dx=\int\limits_{-5}^{-2}\left(-x^2-7x-10\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}-\frac{7x^2}{2}-10x\right)\Bigg|_{-5}^{-2}=$$

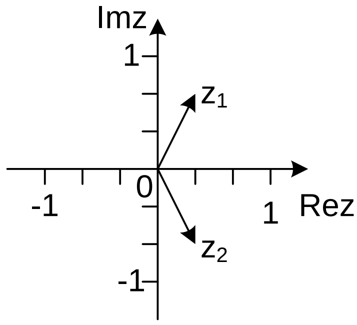
$$=-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{7(-2)^2}{2}-10(-2)-\left(-\frac{(-5)^3}{3}-\frac{7(-5)^2}{2}-10(-5)\right)=$$

$$=\frac{8}{3}-14+20-\frac{125}{3}+\frac{175}{2}-50=-\frac{117}{3}-30+73{,}5=4{,}5\,кв.ед.$$

Контрольная работа № 5
Дифференциальные уравнения
Вариант № 7

Задача 137а. Решить уравнение, решение изобразить геометрически.

$$9z^2-6z+5=0;$$
$$D=36-4\cdot 9\cdot 5=-144;$$
$$z_1=\frac{6+\sqrt{-144}}{18}=\frac{6+12i}{18}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i;$$
$$z_1=\frac{6-\sqrt{-144}}{18}=\frac{6-12i}{18}=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i.$$



Задача 147. Найти общее решение ДУ.

$$y'ctg3x+y=7.$$

Данное уравнение является уравнением с разделяемыми переменными. Разделим переменные и проинтегрируем.

$$\frac{dy}{dx}ctg3x+y-7=0;$$
$$ctg3xdy+(y-7)dx=0;$$
$$\frac{dy}{y-7}+\frac{dx}{ctg3x}=0;$$
$$\int\frac{dy}{y-7}+\int\frac{dx}{ctg3x}=C;$$
$$\ln(y-7)-\frac{1}{3}\ln\cos x=C;$$
$$\ln\frac{y-7}{\sqrt[3]{\cos x}}=C.$$

Введем новую постоянную C_1, связанную с C зависимостью $C=\ln C_1$, тогда:

$$\ln\frac{y-7}{\sqrt[3]{\cos x}}=\ln C_1;$$
$$\frac{y-7}{\sqrt[3]{\cos x}}=C_1;$$
$$y=C_1\sqrt[3]{\cos x}+7$$

Задача 167. Найти общее решение ДУ.

$$y''-2y'-3y=2e^{2x}.$$

Характеристическое уравнение $r^2-2r-3=0$ имеет корни $r_1=-1,\ r_2=3$, так общее решение соответствующего уравнения без правой части есть $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

Частное решение исходного уравнения будем искать в виде $y^*=Ae^{2x}$ (где А – постоянная).

Найдем производные частного решения и подставим их в исходное уравнение:

$$y^{*\prime}=2Ae^{2x};\ y^{*\prime\prime}=4Ae^{2x}.$$

$$(4A-2\cdot 2A-3\cdot A)e^{2x}=2e^{2x};$$

$$-3A=2$$

$$A=-\frac{2}{3}.$$

Искомое частное решение y^* есть:

$$y^*=-\frac{2}{3}e^{2x}.$$

Общее решение уравнения есть:

$$y=\bar{y}+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}-\frac{2}{3}e^{2x}.$$

Контрольная работа № 6
Теория вероятностей и математическая статистика
Вариант № 7

Задача 177. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,8, второй - 0,6, третий – 0,5. Найти вероятность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов.

Решение.

Обозначим события: A_i – студент сдаст i-й экзамен (i = 1, 2, 3). Пусть событие E – студент сдаст не менее двух экзаменов. Очевидно, что событие E означает сдачу любых двух экзаменов из трех либо всех трех экзаменов, т.е.

$$E=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3;$$

$$P(E)=0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5+0{,}8\cdot 0{,}4\cdot 0{,}5+0{,}2\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5+0{,}8\cdot 0{,}6\cdot 0{,}5=0{,}7.$$

Ответ: 0,7.

Задача 197. Дискретная случайная величина X задана законом распределения. Найти: а) p; б) M(X); в) D(X); г) M(αX+β).

X	1,3	2,3	3,3	4,3	5,5
p	0,2	0,15	p	0,1	0,3
α= 4 β=-2					

а) Поскольку случайные события должны быть попарно несовместимы и образовывать полную группу, то есть удовлетворять условие: $\sum_{i=1}^{k}P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{k}p_i=1$.

Тогда: $0{,}2+0{,}15+p+0{,}1+0{,}3=1\Rightarrow p=0{,}25$.

б) $M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$; $M(X)=1{,}3\cdot 0{,}2+2{,}3\cdot 0{,}15+3{,}3\cdot 0{,}25+4{,}3\cdot 0{,}1+5{,}5\cdot 0{,}3=3{,}51.$

в) $D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2$; $D(X)=1{,}3^2\cdot 0{,}2+2{,}3^2\cdot 0{,}15+3{,}3^2\cdot 0{,}25+4{,}3^2\cdot 0{,}1+$
$+5{,}5^2\cdot 0{,}3-3{,}51^2=2{,}4579.$

г) $M(\alpha X+\beta)=(4\cdot 1{,}3-2)\cdot 0{,}2+(4\cdot 2{,}3-2)\cdot 0{,}15+(4\cdot 3{,}3-2)\cdot 0{,}25+(4\cdot 4{,}3-2)\cdot 0{,}1+$
$+(4\cdot 5{,}5-2)\cdot 0{,}3=12{,}04.$

Задача 217. Из генеральной совокупности произведена выборка. Составить: а) вариационный ряд; б) таблицу распределения частот; в) таблицу распределения относительных частот (частостей). Построить полигон частот. Найти выборочную среднюю $\bar{x}_в$; исправленную выборочную дисперсию $S_в^2$; коэффициент вариации; моду M_0; медиану M_e.

4	6	9	5	8	9	7	5	6	10
5	9	7	5	7	6	6	7	10	6
7	8	4	7	9	8	7	4	7	8

а) Поскольку вариационный ряд – это последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, то ряд составленный из вариант данной выборки будет иметь вид:

4,4,4,5,5,5,5,6,6,6,6,6,7,7,7,7,7,7,7,7,8,8,8,8,9,9,9,9,10,10.

б)

x_i	4	5	6	7	8	9	10
n_i	3	4	5	8	4	4	2

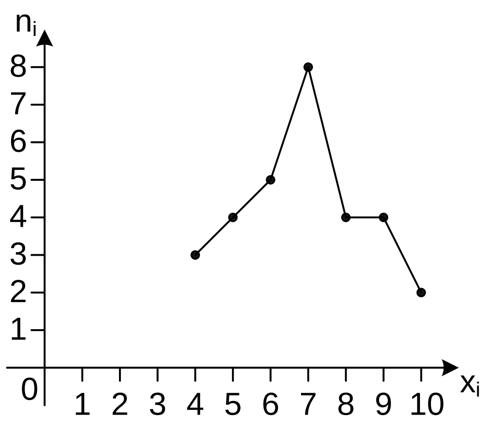
в) $w_i=\dfrac{n_i}{n}$ - относительная частота (частость).

$w_1=\dfrac{3}{30}=0{,}1$; $w_2=\dfrac{4}{30}=0{,}1(3)$; $w_3=\dfrac{5}{30}=0{,}1(6)$; $w_4=\dfrac{8}{30}=0{,}2(6)$;
$w_5=\dfrac{4}{30}=0{,}1(3)$; $w_6=\dfrac{4}{30}=0{,}1(3)$; $w_6=\dfrac{2}{30}=0{,}0(6)$

x_i	4	5	6	7	8	9	10
w_i	0,1	0,1(3)	0,1(6)	0,2(6)	0,1(3)	0,1(3)	0,0(6)

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_1, n_1), (x_2, n_2),..., (x_k, n_k), где x_i - варианты выборки; n_i - соответствующие частоты $(i = 1, 2,...,k)$.

Построим полигон частот.



Найдем выборочную среднюю: $\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$, где x_i (i=1,2,3,…,k) – варианты выборки; n_i (i=1,2,3,…,k) – соответствующие частоты; n – объем выборки.

$$\overline{x}_в = \frac{4\cdot 3 + 5\cdot 4 + 6\cdot 5 + 7\cdot 8 + 8\cdot 4 + 9\cdot 4 + 10\cdot 2}{30} = 6{,}8(6).$$

Найдем исправленную выборочную дисперсию: $S_в^2 = \frac{n}{n-1} D_в$, где $D_в$ - выборочная дисперсия.

$$D_в = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \frac{1}{30}(16\cdot 3 + 25\cdot 4 + 36\cdot 5 + 49\cdot 8 + 64\cdot 4 + 81\cdot 4 + 100\cdot 2) - \left(6{,}8(6)\right)^2 = 2{,}8$$

$$S_в^2 = \frac{30}{29}\cdot 2{,}8 = 2{,}9.$$

Найдем коэффициент вариации.

$$V = \frac{\sigma}{\overline{x}_в}\cdot 100\%,$$

где $\sigma = \sqrt{D_в}$ - среднеквадратическое отклонение.

$$V = \frac{\sqrt{2{,}8}}{6{,}8(6)}\cdot 100\% = 24\%.$$

Поскольку мода вариационного ряда – это варианта с наибольшей частотой, то $\mathrm{M}_0 = 7$.

Медиана – это варианта которая делит вариационный ряд попалам, в нашем случае $\mathrm{M}_e = 7$.